

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# EMISSIONE DI BREMSSTRAHLUNG E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Filippo Tonti**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa**

---

Sessione III  
Anno Accademico 2018/2019



## Abstract

I processi di radiazione si distinguono tra processi in riga e processi nel continuo, in cui i fotoni vengono emessi in un ampio intervallo di lunghezza d'onda.

La *Bremsstrahlung* fa parte di quest'ultima categoria ed è oggetto di studio di questo elaborato; in particolare si partirà dalla descrizione approssimativa del singolo evento, per poi passare a considerare la radiazione da un plasma reale, con breve discussione sui parametri d'impatto minimo e massimo e un breve accenno alla trattazione quantistica, tramite l'introduzione del fattore di Gaunt.

Seguirà la descrizione della *Bremsstrahlung termica*, un *processo termico* che emette dalla banda radio ai raggi  $\gamma$ . Si tratterà anche la *Bremsstrahlung relativistica*, un *processo non termico* che in quanto tale segue una legge di potenza e non la distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Si lascerà spazio anche al processo di autoassorbimento per giungere così allo spettro complessivo del processo di radiazione nei diversi regimi.

Nella seconda parte dell'elaborato si studieranno alcuni casi astrofisici iconici in cui la *Bremsstrahlung* assume un ruolo fondamentale; in particolare si darà spazio alla descrizione di alcuni fenomeni in differenti regioni dell'Universo: dai brillamenti solari agli ammassi di galassie, passando per le regioni HII si darà una descrizione di come questo processo entra in gioco sostanzialmente per tutte le grandezze scala dell'Universo.





# Indice

<b>1</b>	<b>La radiazione di Bremsstrahlung</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione: che cos'è la Bremsstrahlung . . . . .	1
1.2	Radiazione da un singolo evento . . . . .	2
1.3	Radiazione da un plasma reale . . . . .	4
1.4	Bremsstrahlung termica . . . . .	6
1.5	Autoassorbimento nella Bremsstrahlung . . . . .	7
1.6	Brillanza di Bremsstrahlung . . . . .	8
1.7	Bremsstrahlung relativistica . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>11</b>
2.1	Introduzione: Bremsstrahlung in astrofisica . . . . .	11
2.2	Bremsstrahlung su scala stellare: i brillamenti solari . . . . .	12
2.3	Bremsstrahlung su scala galattica: ISM e regioni HII . . . . .	13
	2.3.1 Mezzo interstellare . . . . .	13
	2.3.2 Regioni HII . . . . .	13
2.4	Bremsstrahlung su scala extragalattica: ICM e ammassi di galassie . . . . .	14
<b>A</b>	<b>Stima dei parametri d'impatto massimo e minimo</b>	<b>i</b>

# Capitolo 1

## La radiazione di Bremsstrahlung

### 1.1 Introduzione: che cos'è la Bremsstrahlung

La radiazione dovuta all'accelerazione di cariche nel campo coulombiano di un'altra carica è chiamata *Bremsstrahlung*. L'interazione elettrostatica induce un'emissione di un fotone da parte dell'elettrone, il quale, perdendo parte della propria energia cinetica, decelera; questo è il motivo per cui lo stesso termine "Bremsstrahlung" significa proprio *radiazione di frenamento* in tedesco. Durante questo procedimento si hanno cariche libere sia prima che dopo l'emissione, per questo motivo viene anche chiamata *emissione free-free*.

Nell'elaborato verrà portata una trattazione classica, in cui le particelle vengono considerate come degli oggetti puntiformi di energia  $E = h\nu$  e non come delle onde; si esclude quindi la trattazione quantistica del processo, ad eccezione del termine correttivo di *Gaunt* come si vedrà in seguito<sup>1</sup>.

Nel processo di emissione per Bremsstrahlung si hanno elettroni che interagiscono con degli ioni<sup>2</sup> e irradiano energia: sapendo che l'accelerazione è inversamente proporzionale alla massa, nella Bremsstrahlung elettrone-ione a cui si fa riferimento, i principali emettitori sono gli elettroni. Si noti che sarebbe possibile anche avere interazioni tra soli elettroni o tra soli protoni, ma in questo caso il dipolo elettrico sarebbe nullo e dunque non ci sarebbe emissione di radiazione.

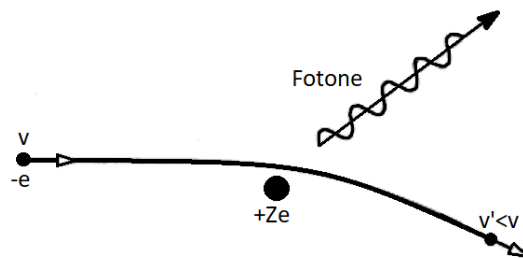


Figura 1.1: Schema dell'interazione elettrone-ione con emissione di Bremsstrahlung

<sup>1</sup>La fisica classica è valida quando la lunghezza di *de Broglie*  $\lambda_{dB} = \sqrt{\hbar m k T}$  è più piccola della scala di interazione e per tale motivo è possibile non considerare il principio di indeterminazione di Heisenberg.

<sup>2</sup>In astrofisica lo ione è solitamente un protone, ossia idrogeno ionizzato (HII).

## 1.2 Radiazione da un singolo evento

Si parte considerando l'interazione tra uno ione (di carica  $+Ze$  con  $Z$  numero atomico) e un elettrone (di carica  $-e$ ) in un gas monoatomico e completamente ionizzato. Osservando la figura 1.2, si studia il caso in cui la velocità dell'elettrone sia non relativistica ( $v \ll c$ ), ma allo stesso tempo sia sufficientemente elevata da considerare che durante l'interazione l'elettrone perda solo una piccola frazione della sua energia cinetica e dunque la deviazione dalla sua traiettoria supposta rettilinea sia trascurabile.

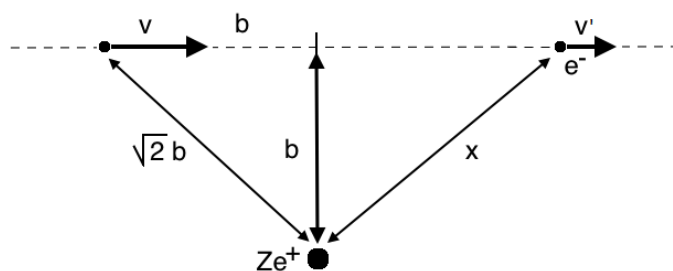


Figura 1.2: Schema dell'interazione elettrone-ione per  $v \ll c$

Con queste doverose premesse si ha che la potenza totale irradiata dal singolo elettrone è data dalla *formula di Larmor*, esplicitata nell'equazione 1.1.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \quad (1.1)$$

Dove il termine  $a$  rappresenta l'accelerazione. Ricavarci  $a(t)$  risulta semplice con l'osservazione che le particelle interagiscono mediante la forza di Coulomb, come mostrato nell'equazione 1.2 (si noti che  $x(t)$  è la distanza tra lo ione e l'elettrone, ovviamente non costante nel tempo).

$$F(t) = ma(t) \simeq -\frac{Ze^2}{x(t)^2} \Rightarrow a(t) = \frac{Ze^2}{mx(t)^2} \quad (1.2)$$

La conclusione immediata che si deriva è che  $P(t) \propto x(t)^{-4}$ , cioè la potenza emessa dal singolo elettrone decresce con la distanza di un fattore 4; questo implica che il massimo dell'emissione lo si ha in corrispondenza della distanza minima delle particelle.

Si può notare dall'equazione 1.2 che anche l'accelerazione è massima quando la distanza è minima, per cui, definendo la distanza minima *parametro d'impatto* (indicato con  $b$ ) e ponendo  $x_{min} = b$ , si ottiene come risultato l'accelerazione massima mostrata nell'equazione 1.3.

$$a_{max} = \frac{Ze^2}{mb^2} \quad (1.3)$$

Sostituendo dunque l'equazione 1.3 nell'equazione della potenza emessa 1.1 si ottiene la massima emissione, data dall'equazione 1.4.

$$P_{max} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{Ze^2}{mb^2} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m^2 b^4} \quad (1.4)$$

Si osserva nuovamente la figura 1.2: per convenzione si suppone che l'interazione abbia inizio quando l'elettrone si trova ad una distanza  $b$  dal punto di minima distanza tra lo ione e la traiettoria dell'elettrone stesso, cioè quando  $x = b\sqrt{2}$ . Questo implica che l'emissione ha inizio quando  $P_i = \frac{1}{4}P_{max}$ . L'interazione tra le due cariche ha una durata esigua, ed è limitata ad un tratto molto breve della traiettoria; per una mera convenzione l'interazione termina quando l'elettrone si trova ad una distanza  $b$  dopo il punto di minimo. Con queste osservazioni risulta facile scrivere l'intervallo di tempo di reazione, conosciuto come *tempo di collisione*, nell'equazione 1.5.

$$\Delta t = \frac{2b}{v} \quad (1.5)$$

Stabilito il tempo di collisione è possibile ricavare l'energia totale emessa da una singola collisione, come mostrato nell'equazione 1.6.

$$P\Delta t = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m^2 b^4} \frac{2b}{v} = \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m^2} \frac{1}{b^3 v} \propto \frac{1}{b^3 v} \quad (1.6)$$

Si nota immediatamente che, fissando  $b$ , elettroni più veloci emettono di meno poiché il tempo d'interazione tra le cariche è inferiore; allo stesso modo, fissata la velocità, l'energia diminuisce significativamente (di un fattore 3) all'aumentare di  $b$ .

Si forniscono ora le considerazioni finali del singolo evento osservando la figura 1.3.

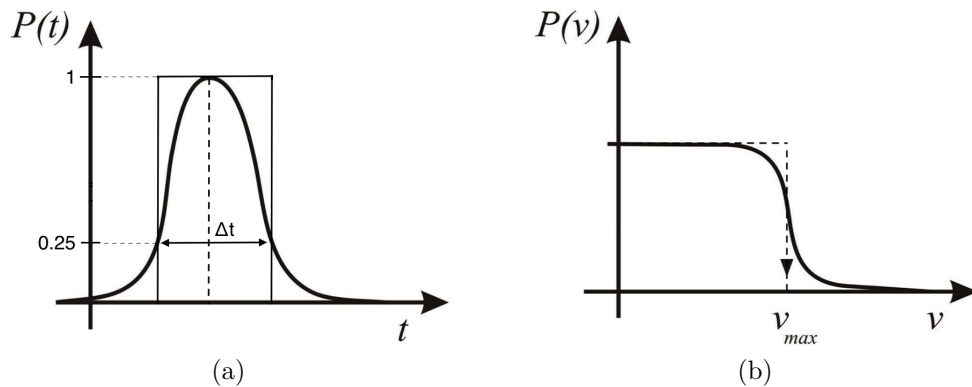


Figura 1.3: Andamenti approssimativi della potenza rispetto a: tempo (a) e frequenza (b)

Si può notare dal grafico (a) che la radiazione viene emessa in un impulso di durata  $\Delta t$  con un profilo leggermente asimmetrico dovuto al fatto che dopo l'interazione l'elettrone ha una velocità leggermente inferiore e quindi per percorrere la medesima distanza  $b$  in linea retta impiega evidentemente più tempo.

L'area del rettangolo di lati  $P_{max}$  e  $\Delta t$  mostra graficamente l'energia totale emessa. Nel grafico (b) invece si nota come la distribuzione spettrale sia piatta fino ad una certa *frequenza di cut-off*, dove crolla esponenzialmente a zero. Questa frequenza di cut-off è presentata nell'equazione 1.7.

$$\nu_{max} \simeq \frac{1}{2\Delta t} = \frac{v}{4b} \quad (1.7)$$

Se si immagina il crollo esponenziale come un taglio netto (mostrato con la riga tratteggiata nel grafico (b)), possiamo approssimare l'energia irradiata per unità di frequenza da singolo evento come mostrato nell'equazione 1.8.

$$\frac{P\Delta t}{\Delta\nu} = \frac{P\Delta t}{\nu_{max}} = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m^2} \frac{1}{b^2 v^2} \propto \frac{1}{b^2 v^2} \quad (1.8)$$

Si vuole concludere questa prima parte con la considerazione che la radiazione emessa dal singolo elettrone è polarizzata linearmente, tuttavia all'interno di un plasma non è presente alcuna direzione privilegiata in cui avvengono le diverse emissioni, per cui ogni emissione sarà polarizzata linearmente con un'orientazione del vettore di polarizzazione differente e complessivamente in un plasma la polarizzazione risulterà nulla.

### 1.3 Radiazione da un plasma reale

Si concentra ora l'attenzione sul caso di un *plasma reale*<sup>3</sup> formato da una nube di elettroni e ioni con densità numeriche rispettivamente  $n_e$  e  $n_z$ , considerando il caso in cui  $n_e \geq n_z$ .

Si osserva ora il caso schematizzato nella figura 1.4: il numero di collisioni compiute da un elettrone con un parametro d'impatto compreso tra  $b$  e  $b + db$  nell'unità di tempo è dato dall'equazione 1.9.

$$n_{coll} = 2\pi n_z v b \, db \quad (1.9)$$

Dove  $2\pi b db$  è l'area dell'anello evidenziato in azzurro e dove  $v$  è la velocità dell'elettrone. Segue che il numero totale di collisioni compiute da  $n_e$  elettroni nell'unità di volume sarà dato dall'equazione 1.10.

$$N_{coll} = n_e n_{coll} = 2\pi n_e n_z v b \, db \quad (1.10)$$

---

<sup>3</sup>Si noti bene che si sta considerando comunque un caso *non astrofisico*.

L'emissività di una nube che emette per Bremsstrahlung è data dall'equazione 1.11, ricordando che il risultato ottenuto nell'equazione 1.8 è, dimensionalmente parlando, una potenza per unità di frequenza, ovverosia  $dW/d\nu$ .

$$\begin{aligned}
J_{br}(v, \nu) &= \frac{dW}{d\nu dV dt} = 2\pi n_e n_z v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2} \frac{1}{b^2 v^2} b db \\
&= \frac{32}{3} \frac{\pi e^6}{c^3 m_e^2 v} n_e n_z Z^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} \\
&= \frac{32}{3} \frac{\pi e^6}{c^3 m_e^2 v} n_e n_z Z^2 \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

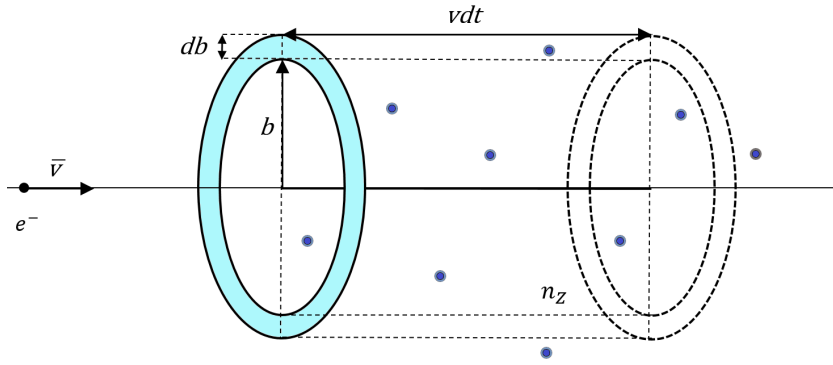


Figura 1.4: Schema di riferimento in cui l'elettrone si muove verso una nube

In astrofisica le densità sono molto basse, perciò il processo di emissione è tendenzialmente lento; inoltre si ha spesso a che fare con l'idrogeno, di conseguenza, considerando  $n_e \approx n_z$  si ottiene la proporzionalità espressa nell'equazione 1.12.

$$J_{br}(v, \nu) \propto \frac{1}{v} n_e^2 \tag{1.12}$$

Dall'equazione 1.12 si vede che, in prima approssimazione, l'emissività di una nube che emette per Bremsstrahlung non dipende dalla frequenza  $\nu$ ; tuttavia la dipendenza da  $\nu$  è nascosta all'interno dei parametri d'impatto, come mostrato nell'appendice A.

Si può ottenere una trattazione più esatta della Bremsstrahlung mediante un fattore correttivo che deriva dalla trattazione quantistica del processo. Il termine correttivo prende il nome di *fattore di Gaunt*<sup>4</sup> ed è presentato nell'equazione 1.13<sup>5</sup>.

$$g_{ff}(\nu, T) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \tag{1.13}$$

<sup>4</sup>Nel dominio radio si ha che  $g_{ff}(\nu, T) \sim 1 - 10$ .

<sup>5</sup>Per la discussione in merito all'utilizzo della trattazione quantistica oppure classica (dipendentemente dalla temperatura) si rimanda sempre all'appendice A.

## 1.4 Bremsstrahlung termica

Nel caso della *Bremsstrahlung termica* si considera il caso in cui una nube di gas sia composta da ioni ed elettroni all'equilibrio termodinamico. In questo caso entra in gioco la descrizione statistica delle particelle, le cui velocità seguono la *distribuzione di Maxwell-Boltzmann*. Nell'equazione 1.14 viene indicata la probabilità che una particella abbia una velocità compresa tra  $v$  e  $v + dv$ .

$$f(v) dv \propto v^2 \cdot \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) dv \quad (1.14)$$

In questa situazione dunque non si ha più a che fare con una singola velocità bensì con una sola temperatura; allora l'emissività specifica di Bremsstrahlung termica, mostrata nell'equazione 1.15, diventa:

$$J_{br}(\nu, T) = \int_{v_{min}}^{\infty} J_{br}(\nu, v) f(v) dv \quad (1.15)$$

La velocità minima, estremo inferiore dell'integrale, si ricava semplicemente considerando l'equazione 1.16.

$$h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}} \quad (1.16)$$

Risolvendo poi l'integrale si ottiene l'equazione 1.17 (con  $[J_{br}(\nu, T)] = \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$ ).

$$J_{br}(\nu, T) = 6.8 \cdot 10^{-38} T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} n_e n_z Z^2 \bar{g}_{ff}(\nu, T) \quad (1.17)$$

Equazione che si riduce essenzialmente all'equazione 1.18.

$$J_{br}(\nu, T) \propto n_e^2 T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \quad (1.18)$$

Si noti che l'esponenziale dipende dalla frequenza e definisce il *cut-off* nello spettro di radiazione a  $\nu_{cutoff} \simeq kT/h$ . Si è riutilizzata qui la considerazione  $n_e \approx n_z$  come nel caso precedente, mentre compare qui il *fattore di Gaunt medio*, che assume un valore dell'ordine dell'unità (o delle poche unità) dipendentemente dal valore di  $h\nu/kT$ .

È interessante notare come, fissata una certa temperatura, la distribuzione spettrale si mantiene piatta<sup>6</sup> fino ad una certa frequenza di cut-off, oltre la quale domina il fattore esponenziale (negativo) e l'emissività dunque cala rapidamente a zero.

Occorre porre attenzione a non confondere l'emissività specifica di Bremsstrahlung mostrata nell'equazione 1.17 con l'emissività totale, ovverosia l'energia totale emessa per unità di volume, indipendente dalla frequenza.

L'emissività totale, mostrata nell'equazione 1.19, altro non è che l'integrale sull'intero spettro dell'emissività specifica, ed è perciò data dall'area sottesa dalla distribuzione spettrale (area colorata di azzurro nella figura 1.5 (a)).

<sup>6</sup>In realtà il fattore di Gaunt medio modifica lo spettro, rendendolo non perfettamente piatto.

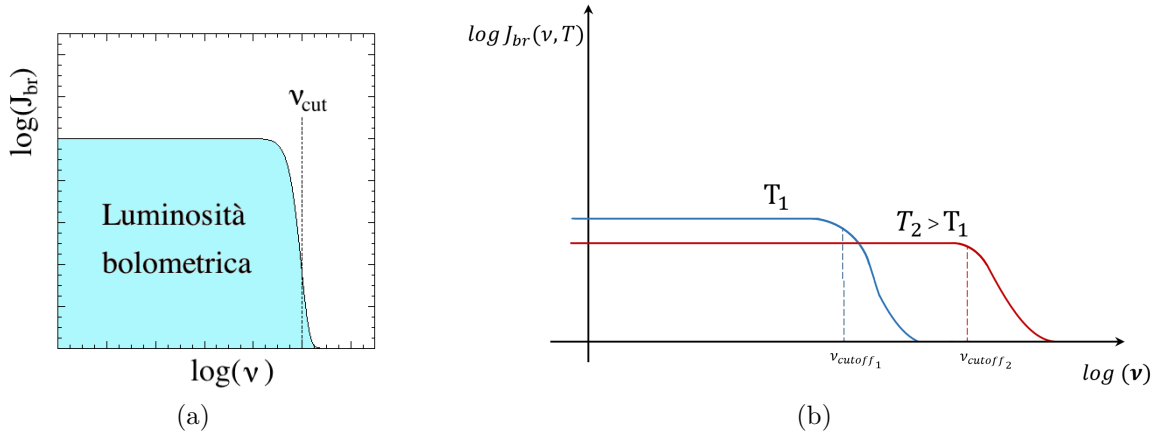


Figura 1.5: Luminosità bolometrica (a) e confronto degli spettri per  $T_1$  e  $T_2$  (b)

$$J_{br}(T) = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{1/2} n_e n_z Z^2 \bar{g}_B(T) \quad (1.19)$$

In questo caso si ha  $[J_{br}(T)] = \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}$  e si ha che  $1.1 \leq \bar{g}_B(T) \leq 1.5$ .

Ora consideriamo la figura 1.5 (b): si vede che se consideriamo  $T_2 > T_1$  si ottiene che:

$$\begin{cases} J_{br}(\nu, T_1) > J_{br}(\nu, T_2) \\ J_{br}(T_1) < J_{br}(T_2) \end{cases}$$

Questo significa che l'energia irradiata nell'unità di volume e di tempo è maggiore a basse temperature; l'emissione totale invece è maggiore a temperature più alte. Dall'immagine 1.5 (b) si vede che la differenza in altezza a favore di  $T_1$  non riesce a compensare la differenza di frequenza di cut-off a favore di  $T_2$  e per questo motivo l'area sottesa dallo spettro di  $T_2$  risulta maggiore dell'area sottesa dallo spettro di  $T_1$ .

## 1.5 Autoassorbimento nella Bremsstrahlung

Se ci si trova in una situazione di equilibrio termico, il processo di emissione che si sta considerando deve necessariamente essere bilanciato da un processo di assorbimento. In questo caso non si considera più solamente l'interazione tra un elettrone e uno ione (problema a due corpi) ma un problema a tre corpi (elettrone, ione e fotone). In questo caso l'*assorbimento free-free termico* rilascia una quantità di energia dall'interazione elettrone-ione che viene acquistata da un elettrone libero.

Si presenta ora la *legge di Kirchoff* nell'equazione 1.20.

$$j(\nu, T) = \mu(\nu, T) B(\nu, T) \quad (1.20)$$

Dove  $j(\nu, T)$  è il *coefficiente di emissione*, mentre  $\mu(\nu, T)$  è il *coefficiente di assorbimento* e  $B(\nu, T)$  è la legge di Planck per il corpo nero.



Per una nube di plasma che emette isotropicamente e termicamente per Bremsstrahlung si ottiene il coefficiente come espresso nell'equazione 1.21 oppure numericamente come espresso nell'equazione 1.22.

$$\mu_{br}(\nu, T) = \frac{J_{br}(\nu, T)}{4\pi B(\nu, T)} \quad (1.21)$$

$$\mu_{br}(\nu, T) = 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 n_e n_z \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{ff} \quad (1.22)$$

Una prima chiara evidenza è la forte dipendenza dalla frequenza (di un fattore  $-3$ ), questo implica che:

- ad alte frequenze l'assorbimento non è rilevante, in quanto per  $h\nu \gg kT$  si ha che  $\mu_{br}(\nu, T) \propto \nu^{-3}$  (dato che l'esponenziale diventa trascurabile);
- a basse frequenze, con  $h\nu \ll kT$  si entra nel *regime di Rayleigh-Jeans*, giungendo numericamente all'equazione 1.23.

$$\mu_{br}(\nu, T) = 0.018 T^{-3/2} Z^2 n_e n_z \nu^{-2} \bar{g}_{ff} \quad (1.23)$$

## 1.6 Brillanza di Bremsstrahlung

La brillanza totale di una nube che emette per Bremsstrahlung è data dalla somma degli effetti di emissione e di assorbimento; si procede ora ad analizzarne le diverse parti dello spettro, facendo riferimento alla figura 1.6.

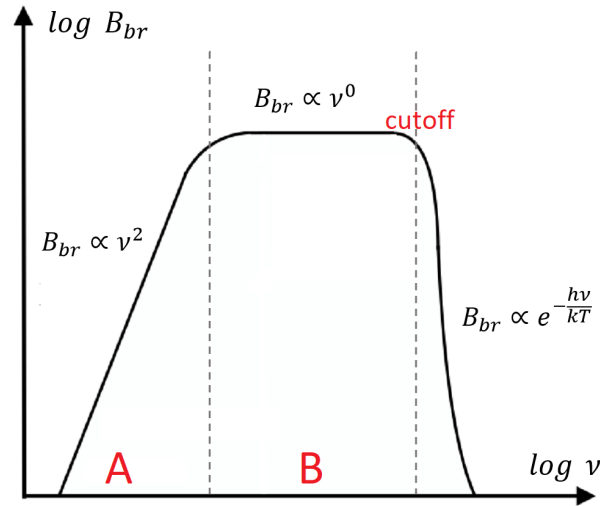


Figura 1.6: Spettro complessivo della Bremsstrahlung nei diversi regimi

In prima analisi, per le considerazioni fatte nella sezione precedente si può già asserire che l'assorbimento è efficiente a basse frequenze, con conseguente irripidimento dello spettro mostrato nella *parte A* della figura 1.6. Ad alte frequenze invece l'effetto dell'assorbimento è trascurabile in buona approssimazione (*parte B*), per poi giungere al cut-off esponenziale<sup>7</sup>.

Si distinguono ora due regimi differenti per i quali è possibile fare le successive considerazioni.

- A basse frequenze si è nel regime di Rayleigh-Jeans e la brillantezza, ora dipendente dall'opacità, sarà data dall'equazione 1.24.

$$B(\nu, T_e) \propto T_e \nu^2 (1 - e^{-\tau(\nu, T_e)}) \quad (1.24)$$

La dipendenza dall'opacità implica che si deve distinguere tra due ulteriori regimi, infatti:

- se  $\tau(\nu, T_e) \gg 1$  si parla di *regime otticamente spesso*, in questo caso si avrà una dipendenza espressa dall'equazione 1.25.

$$B(\nu, T_e) \propto T_e \nu^2 \quad (1.25)$$

Come si vede infatti dalla figura 1.6 abbiamo un irripidimento dello spettro dovuto al fattore  $\nu^2$ .

- se invece  $\tau(\nu, T_e) \ll 1$  ci si trova nel *regime otticamente sottile* e in questo caso si avrà una dipendenza mostrata dall'equazione 1.26.

$$B(\nu, T_e) \propto T^{-1/2} \nu^0 \quad (1.26)$$

Questa *non dipendenza* da  $\nu$  è possibile riscontrarla nel tratto in cui, dopo una certa frequenza, lo spettro diventa piatto.

- Ad alte frequenze, come mostra l'equazione 1.27, ci troviamo in una situazione in cui si ha il cut-off termico esponenziale.

$$B(\nu, T_e) \propto e^{-\tau(\nu, T_e)} \quad (1.27)$$

In queste regioni il coefficiente di assorbimento è molto minore di 1 e per questo motivo, essendo il regime otticamente sottile, non si manifesta l'autoassorbimento.

---

<sup>7</sup>Nota bene: non tutti i plasmi astrofisici presentano il fenomeno dell'autoassorbimento nei propri spettri; infatti in alcuni casi le frequenze in cui si ha il fenomeno sono fuori da ogni banda osservabile.

## 1.7 Bremsstrahlung relativistica

Fino ad ora si sono sempre presi in considerazione elettroni non relativistici, ovverosia con velocità  $v \ll c$ ; ora invece si andrà ad analizzare brevemente il caso in cui  $v \simeq c$ . In questo caso l'emissività per *Bremsstrahlung relativistica* è data dall'equazione 1.28.

$$J_{br,rel}(v, \nu) = \frac{32}{3} \frac{\pi e^6}{c^3 m_e v} n_e n_z Z^2 \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \quad (1.28)$$

Ricordando che  $Z$  è il numero atomico e considerando le abbondanze cosmiche, si ha che  $\bar{Z} = 1.3$ , da cui si ottiene che l'emissività per Bremsstrahlung relativistica è data dall'equazione 1.29.

$$J_{br,rel}(v, \nu) \approx 5 \cdot 10^{-42} n_e n_z \quad (1.29)$$

La cosa di fondamentale importanza che si fa notare è che la temperatura sparisce tra le dipendenze nel caso relativistico. In particolare se si integra su tutte le velocità si ottiene un risultato rilevante: lo spettro di emissione nel caso di Bremsstrahlung relativistica è una legge di potenza, poiché è un processo non termico (in quanto indipendente dalla temperatura).

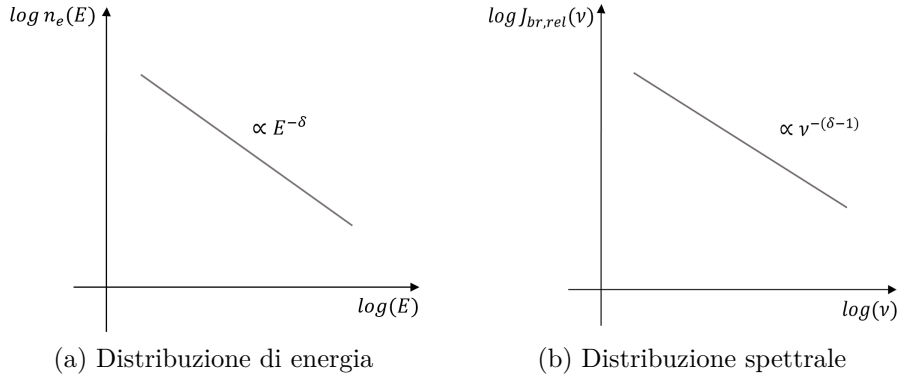


Figura 1.7: Distribuzioni a legge di potenza della Bremsstrahlung *non* termica

Come si vede dalla figura 1.7 si ha una distribuzione di energia a legge di potenza e una conseguente distribuzione spettrale (equazione 1.30) in cui si ha che il profilo spettrale è legato alla distribuzione di energia delle particelle attraverso l'*indice spettrale*  $\delta$ .

$$J_{br,rel}(\nu) \approx \nu^{-\delta+1} \quad (1.30)$$

É quindi interessante notare come il fatto che si abbia Bremsstrahlung termica o Bremsstrahlung relativistica (non termica) dipenda sostanzialmente solo dalla distribuzione degli elettroni, che possono seguire la legge di Maxwell-Boltzmann o una legge di potenza come quella dell'equazione 1.30.

In conclusione è possibile avere Bremsstrahlung termica o relativistica dipendentemente dalla popolazione degli elettroni (velocità e distribuzione dell'energia).

# Capitolo 2

## Applicazioni astrofisiche

### 2.1 Introduzione: Bremsstrahlung in astrofisica

In astrofisica si possono trovare tanti esempi di emissione di Bremsstrahlung, in particolare essa è il processo di raffreddamento principale per i plasmi ad elevate temperature ( $T > 10^7 K$ ).

Il *tempo di raffreddamento*, mostrato nell'equazione 2.1, è definito come il rapporto tra l'energia termica totale del plasma e la quantità di energia persa per Bremsstrahlung.

$$t_{cool} = \frac{1.8 \cdot 10^{11}}{n_e \bar{g}_B} T^{1/2} \text{ sec} = \frac{6 \cdot 10^3}{n_e \bar{g}_B} T^{1/2} \text{ yr} \quad (2.1)$$

Il tempo di raffreddamento quindi aumenta con la temperatura del plasma, mentre per plasmi meno rarefatti si ha che le interazioni più frequenti rendono il tempo di raffreddamento minore. Stimare il *cooling time* è importante per cercare di ottenere informazioni sulla sorgente ionizzante e sul plasma preso in considerazione. Verrà mostrato successivamente come, per condizioni di densità e temperatura di una regione HII si ha un tempo di raffreddamento breve, mentre per plasmi più rarefatti e con temperature maggiori, come l'ICM, si raggiungono valori superiori all'età dell'Universo.

Inoltre la Bremsstrahlung si rende utile in astrofisica anche perché è possibile utilizzare la frequenza alla quale avviene il cut-off per andare a determinare in maniera approssimativa la temperatura di equilibrio termico del plasma, seguendo il ragionamento mostrato nell'equazione 2.2.

$$\nu_{cutoff} = \frac{kT}{h} \Rightarrow T = \frac{h\nu}{k} \quad (2.2)$$

In generale i plasmi termici in grado di emettere per Bremsstrahlung sono ampiamente diffusi nell'Universo, sia su grande sia su piccola scala; questo poiché essi possono essere trovati ovunque vi sia una sorgente ionizzante oppure in tutti quei luoghi in cui la densità e la temperatura siano tali da mantenere lo stato di ionizzazione<sup>1</sup>.

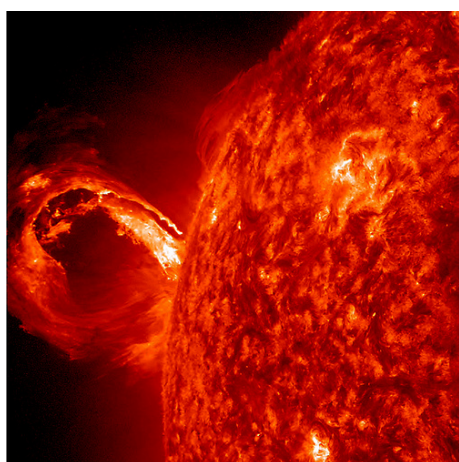
In questo secondo capitolo si presenterà una panoramica degli esempi di Bremsstrahlung più rilevanti in astrofisica, partendo da una scala stellare, per arrivare alla radiazione emessa dal mezzo intergalattico e intraccluster.

---

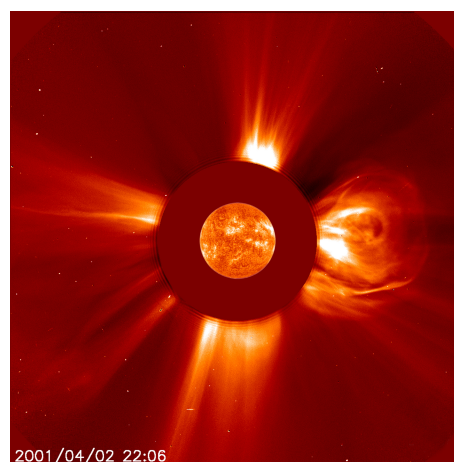
<sup>1</sup>In particolare: l'idrogeno ha una temperatura di ionizzazione di circa 10000K mentre l'elio (He) subisce la prima ionizzazione a circa 15000K e la seconda a circa 40000K.

## 2.2 Bremsstrahlung su scala stellare: i brillamenti solari

Lo spettro del Sole, in prima analisi, risulta ben approssimabile da uno spettro di corpo nero di temperatura attorno ai  $5800\text{ K}$ ; tuttavia numerose osservazioni in tutte le bande dello spettro elettromagnetico denunciano un'attività di emissione significativa anche nella banda X da parte del Sole. Questa emissione X è di tipo termico, dovuta proprio al fenomeno della Bremsstrahlung e può essere spiegata solamente in presenza di regioni che abbiano temperature superiori o dell'ordine di milioni di gradi Kelvin. È noto infatti che la corona solare abbia una temperatura attorno a questi valori attesi a causa della formazione di *archi coronali*, generati a loro volta dalla turbolenza delle celle convettive, che amplifica il campo magnetico nei pressi della fotosfera. Gli archi coronali sono "tubi" di flusso magnetico che emergono dalla fotosfera pieni di plasma a temperature molto alte a causa dell'elevata attività magnetica in queste regioni attive. Gli archi coronali possono essere spesso i precursori dei brillamenti e delle espulsioni di massa coronali (figure 2.1 (a) e (b)).



(a) Credit: Nasa's Solar Dynamics Observatory



(b) Credit: SOHO Consortium, ESA, NASA

Figura 2.1: Flares solari con conseguenti espulsioni di massa coronale

Un *brillamento solare* (o *flare solare*) è una violenta eruzione di materia<sup>2</sup> proveniente dalla fotosfera del Sole, causata da un improvviso rilascio di energia dovuto al fenomeno della riconnessione delle linee del campo magnetico. Quando c'è un'intensa attività è possibile che vengano originate espulsioni di massa coronale (o *CMEs: coronal mass ejections*), dove il materiale viene espulso sotto forma di plasma (costituito principalmente da elettroni e protoni).

---

<sup>2</sup>Le onde d'urto risultanti viaggiano attraverso la fotosfera a velocità dell'ordine di  $1400\text{ km/s}$ .

Dalle figure 2.1 è apprezzabile come le dimensioni di questi fenomeni possono essere enormi, raggiungendo addirittura i  $10^5$  km (con picchi energetici di circa  $10^{33}$  erg). Si noti che i brillamenti più intensi sono in grado di produrre i *raggi cosmici solari* (rilevabili in banda X e  $\gamma$ ) che presenteranno un andamento a legge di potenza caratteristico della Bremsstrahlung relativistica. In ultima istanza quindi i raggi X più deboli (*soft X-ray*) sono prodotti dalla Bremsstrahlung termica dovuta ad elettroni e protoni, mentre i raggi X più forti (*hard X-rays*) sono prodotti dalla Bremsstrahlung non termica.

## 2.3 Bremsstrahlung su scala galattica: ISM e regioni HII

### 2.3.1 Mezzo interstellare

Il mezzo interstellare (o *interstellar medium*, *ISM*) è il materiale (costituito da gas e polvere) che si trova all'interno di una galassia; in generale le fasi in cui viene suddiviso sono: HIM (*Hot Ionized Medium*), WIM (*Warm Ionized Medium*), WNM (*Warm Neutral Medium*) e CNM (*Cold Neutral Medium*), caratterizzate da regimi di temperature e densità diverse.

**HIM:** Le temperature nel ISM caldo sono comprese nell'intervallo  $10^6 - 10^7$  K e in questa fase dell'ISM la Bremsstrahlung è il processo di raffreddamento principale.

**WIM:** Nel mezzo ionizzato a temperature dell'ordine di  $10^4$  K la Bremsstrahlung è il processo radiativo principale, che forma il continuo negli spettri, a cui poi si sommano le righe di emissione dell'idrogeno e dell'ossigeno delle regioni HII.

Nel WNM (con  $T \approx 10^2 - 10^4$  K) e nel CNM (con  $T \approx 10 - 100$  K) non si raggiungono temperature sufficientemente alte per avere radiazione di Bremsstrahlung, che necessita di ioni ed elettroni liberi per essere efficiente.

### 2.3.2 Regioni HII

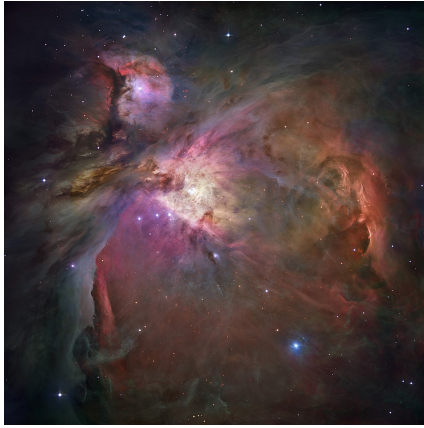
Le regioni HII sono nubi in cui l'idrogeno è ionizzato a causa della presenza di stelle molto massicce e giovani (di classe spettrale O/B). Stelle così tanto massicce hanno temperature superficiali molto alte (attorno ai  $10^4$  K), per cui emettono numerosi fotoni con energia sufficiente per ionizzare l'atomo di idrogeno<sup>3</sup>. Il gas di idrogeno, ionizzandosi, si manterrà a temperature tipiche del WIM e dunque la Bremsstrahlung termica è la radiazione responsabile dell'emissione nel continuo delle regioni HII, con un cut-off attorno a  $\nu \sim 10^{14}$  Hz.

---

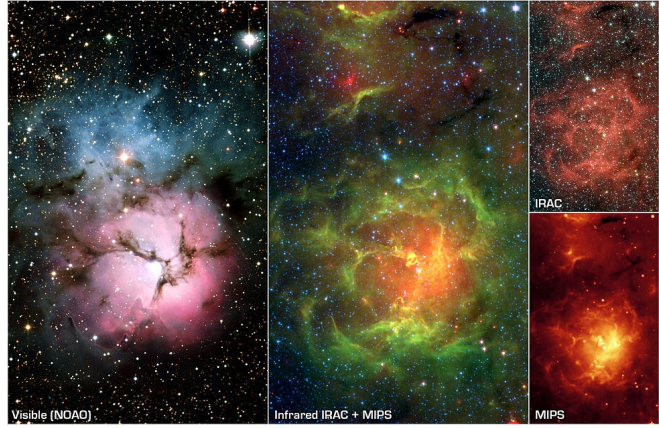
<sup>3</sup>L'energia di ionizzazione dell'idrogeno è  $E_{ion} = 13.6$  eV, il che implica che è sufficiente un fotone con frequenza  $\nu \geq 3.3 \cdot 10^{15}$  Hz, cioè una lunghezza d'onda  $\lambda \leq 91$  nm.

Il tempo di raffreddamento per queste regioni (che tipicamente sono molto compatte), calcolato con la formula 2.1 risulta essere piuttosto breve ( $t_{br} \sim 10^3 \text{ yr}$ ), questo implica che la stella sia stata attiva di recente.

Le regioni HII (mostrate nelle figure 2.2) sono importanti da studiare perché, essendo associate a stelle molto giovani di tipo O/B che rimangono nella fase di *Main Sequence* per tempi molto brevi (qualche decina o centinaio di milioni di anni), sono degli ottimi traccianti di zone di formazione stellare, come per esempio nei bracci delle galassie a spirale.



(a) Credit: NASA, ESA - Hubble Space Telescope



(b) Credit: NASA/JPL-Caltech/J. Rho - Spitzer Space Telescope + IRAC + MIPS

Figura 2.2: (a): Nebulosa di Orione; (b): Nebulosa Trifida a diverse lunghezze d'onda

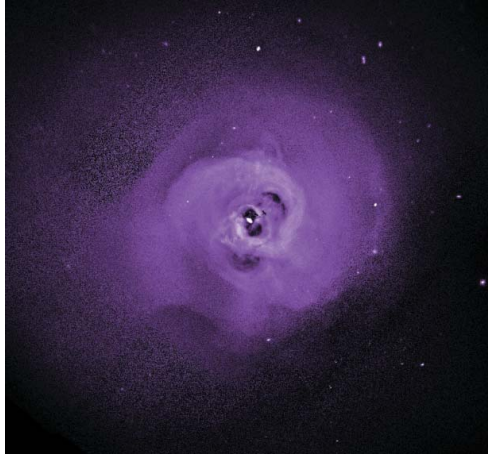
## 2.4 Bremsstrahlung su scala extragalattica: ICM e ammassi di galassie

L'Universo su grande scala ha una distribuzione di materia uniforme, tuttavia localmente le galassie formano degli agglomerati che tipicamente hanno dalle 100 alle 1000 unità: questi agglomerati prendono il nome di *ammassi di galassie*. L'*intracluster medium* (ICM) è il plasma che permea gli ammassi di galassie: è più rarefatto rispetto al ISM e presenta temperature dell'ordine di  $10^7 - 10^8 \text{ K}$ . Il gas è costituito principalmente da idrogeno ed elio ionizzati e la sua emissione X è sostanzialmente emissione per Bremsstrahlung termica con una frequenza di cut-off attorno ai  $10^{18} \text{ Hz}$ .

Questi plasmi hanno una bassissima densità elettronica ( $n_e \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ) per questo motivo i tempi di raffreddamento sono molto lunghi, addirittura superiori all'età dell'Universo ( $t_{cool} \sim 10^{10} \text{ yr}$ ).



L'ammasso di Perseo (figure 2.3) è un ammasso di galassie nell'emisfero nord; dista circa 100  $Mpc$  e contiene migliaia di galassie immerse in un alone di gas caldo. La galassia centrale dell'ammasso è una sorgente di raggi X ben studiata e sembra stia collidendo con una galassia a spirale ed è probabilmente stata formata dall'accrescimento di tante galassie più piccole. L'ammasso di Perseo mostra uno spettro di Bremsstrahlung in banda X e il tempo di raffreddamento per questo sistema risulta essere abbastanza breve se comparato con l'età dell'Universo.



(a) Credit: Chandra-X-ray



(b) Credit: VLA-Radio, Chandra-X-ray, Hubble-Visible, SDSS-Infrared

Figura 2.3: L'Ammasso di Perseo presentato in banda X (a) e in un'immagine composita (b)

In questo contesto che si inserisce il problema del *cooling flow*: infatti al centro dell'ammasso il plasma è più denso e si raffredda tramite Bremsstrahlung termica; raffreddandosi, la pressione termica al centro dell'ammasso diminuisce, mentre risulta maggiore quella delle parti esterne. Questo implica che ci dovrebbe essere un flusso di materia dall'esterno verso l'interno, quindi bisognerebbe osservare dei moti di questo gas che invece non si osservano. Inoltre questo gas, una volta raffreddato, dovrebbe formare stelle, tuttavia questa idea è stata scartata poiché inconsistente con la ricerca di formazione stellare in queste zone, che è risultata inconclusiva. Il motivo della scarsa efficienza del cooling flow è ancora in fase di studio, ma forse è da ricercare nelle onde d'urto generate dal plasma relativistico che si espande con  $v \gg c_s$ . Le onde d'urto potrebbero trasformare l'energia cinetica in energia termica e questo manterrebbe il gas caldo, impedendo il cooling flow. Un altro modo di spiegare le osservazioni prevede che il gas freddo che cade verso il centro dell'ammasso venga processato dalle regioni centrali della galassia, riscaldato di nuovo e spedito verso l'esterno di nuovo in giganti bolle calde. Queste "bolle" sono correlate con le posizioni dei lobi radio<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Questa idea è ancora in fase di verifica, nonostante risulti consistente con diverse osservazioni [12].



# Appendice A

## Stima dei parametri d'impatto massimo e minimo

L'equazione 1.7 fornisce il valore di  $\nu_{max}$  in funzione di  $b_{max}$ , allora, per ottenere il parametro d'impatto massimo basterà considerare la formula inversa espressa nell'equazione A.1.

$$b_{max} \simeq \frac{v}{4\nu_{max}} \quad (\text{A.1})$$

Questo valore di  $b_{max}$  è approssimato in modo tale che le interazioni che avvengono a distanze maggiori siano trascurabili.

La trattazione del parametro d'impatto minimo può essere svolta con l'approccio classico o con quello quantistico. Nell'approccio classico si richiede la condizione  $\Delta v \leq v$  (gli elettroni non possono emettere più energia dell'energia cinetica che dispongono). Seguono le considerazioni riportate nell'equazione A.2 che portano poi alla definizione del parametro d'impatto minimo nel caso classico ( $b_{min-class}$ ).

$$\Delta v \approx a\Delta t = \frac{Ze^2}{m_e b^2} \frac{2b}{v} \leq v \Rightarrow b_{min-class} \simeq \frac{2Ze^2}{m_e v^2} \quad (\text{A.2})$$

L'approccio quantistico invece richiede che sia rispettato il principio di indeterminazione di Heisenberg ( $\Delta p \Delta x \geq h/(2\pi)$ ). In questo caso le considerazioni riportate nell'equazione A.3 portano poi alla definizione del parametro d'impatto minimo nel caso quantistico ( $b_{min-quant}$ ).

$$\begin{aligned} \Delta p &= m_e \Delta v \approx m_e v \quad e \quad \Delta x \approx b \Rightarrow \\ \Rightarrow m_e v &\geq \frac{h}{2\pi b} \Rightarrow b_{min-quant} \simeq \frac{h}{2\pi m_e v} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Al fine di comprendere in che regime utilizzare l'uno o l'altro, si considera il rapporto dei valori trovati, con il risultato riportato nell'equazione A.4 (si è usata la considerazione che  $v = \sqrt{3kT/m_e}$ ).

$$\frac{b_{min-quant}}{b_{min-class}} \approx \frac{137}{Z} \frac{v}{c} \approx \frac{137}{cZ} \sqrt{\frac{3k}{m_e}} T^{1/2} \propto T^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

Qui è fondamentale notare la dipendenza diretta dalla temperatura; in altre parole l'equazione A.4 suggerisce che il limite quantistico entra in gioco quando si hanno temperature elevate. Ne segue che, per esempio, in una regione HII (con temperatura dell'ordine di  $10^4 K$ ) si userà il limite classico, mentre per un gas intergalattico caldo (con temperatura dell'ordine di  $10^8 K$ ) si dovrà considerare il  $b_{max}$  nel limite quantistico.

# Bibliografia

- [1] Appunti del corso Processi di Radiazione e MHD, Prof. Daniele Dallacasa, 2018
- [2] Appunti del corso Galassie Attive, Prof. Gabriele Giovannini, 2019
- [3] Lezioni di radioastronomia di Carla & Roberto Fanti, 2012
- [4] George B. Rybicki, Alan P. Lightman: Radiative processes in astrophysics, Wiley-VCH, 2004
- [5] Ghisellini: Radiative Processes in High Energy Astrophysics, Springer, 2013
- [6] Malcom S. Longair - High energy astrophysics, Third Edition, Cambridge University Press, 2011
- [7] H. Bradt, Astrophysical Processes, 2008
- [8] Cathie Clarke, Bob Carswell-Principles of astrophysical fluid dynamics, Cambridge University Press, 2007
- [9] Krucker, Säm et al. “Coronal  $\Gamma$ -Ray Bremsstrahlung From Solar Flare-Accelerated Electrons.” The Astrophysical Journal, vol 678, no. 1, 2008, pp. L63-L66.
- [10] Amari, T., Canou, A., Aly, J. et al. Magnetic cage and rope as the key for solar eruptions. Nature 554, 211–215 (2018)
- [11] <https://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/mmassi/c5-Processes.pdf>
- [12] <http://www.astro.utu.fi/~cflynn/astroII/l3.html>
- [13] Longair, M. 1992. High Energy Astrophysics. Second edition; volume 1, chapter 3. Cambridge University Press.
- [14] Nulsen et al , 2003, Highlights in Astronomy for the proceedings of JD10, “Evolution in Galaxy Clusters: A Multiwavelength Approach,” held at the Sydney IAU.
- [15] Wikipedia: [wikipedia.org](http://wikipedia.org)
- [16] NASA: [nasa.gov](http://nasa.gov)